Conférence magimatique

J.-B. Aubin

INSA Lyon - ICJ

APMEP, 23 octobre 2016

Pourquoi la magimatique ?

- l'étonnement est un bon point de départ pour l'acquisition d'un savoir...et la magie étonne (si tout va bien)!
- Jusqu'à **juin 2017**, exposition-spectacle “magimatique” à la MMI (gratuit).
- nuance avec la mathémagie, car la magimatique inclut aussi de l'informatique.

Présentation des tours magimatiques

- Tour de la prédiction *
- Tour des cartes *
- Tour de la table de 142 857 **
- Tour de l'écriture décimale de p/q ***
- Tour de la factorisation éclair *
- Tour du Stegosaurus **

Tour de la table de 142 857

Vous connaissez vos tables de multiplication ? Je vous propose d'apprendre la table de 142 857.

Donnez-moi un nombre entre 1 et 100 et je le multiplierai mentalement en quelques secondes par 142 857.

À VOUS !

Tour de l'écriture décimale de p/q

Déterminons p et q de la manière suivante :

1	3	5	7	9	11	13	15	17
0	2	4	6	8	10	12	14	16

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

1. Sommer 2 nombres *sur la même ligne* du numérateur.
2. Sommer 4 nombres du dénominateur tels qu'il n'y en ait qu'un sur chaque ligne et chaque colonne.

Bon et mauvais choix :

Mauvais choix 1 :

1	3	5	7	9
2	4	6	8	0

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Mauvais choix 2 :

1	3	5	7	9
2	4	6	8	0

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Bon choix 3 :

1	3	5	7	9
2	4	6	8	0

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Pour le choix 3, la fraction vaut alors $\frac{1+5}{1+5+10+16}$. À VOUS !

Tour de la factorisation éclair

37 est un nombre fameux.

Procédons maintenant à la factorisation d'un nombre à 6 chiffres $abc\,def$. Pour cela, donnez-moi un nombre à 3 chiffres (différents si possible) et complétons pour obtenir un nombre à 6 chiffres.

Tour du Stegosaurus

Tour en 3 étapes:

- Choisir un mot dans une liste,
- Pour chaque lettre du mot, indiquer si elle appartient à un ensemble de lettres donné,
- Retrouver le mot dans la liste.

Étape 1: Choix du mot dans la liste

1	kayak	9	bilan	17	canut	25	géant
2	balai	10	fétus	18	canoë	26	école
3	butin	11	bravo	19	jouet	27	cruel
4	flash	12	kiwis	20	elfes	28	heure
5	karma	13	appat	21	haiku	29	vegan
6	alibi	14	frite	22	carte	30	jesus
7	flirt	15	bidet	23	doigt	31	dépit
8	athée	16	fesse	24	index	32	chips

Étape 2-1: la première lettre du mot appartient-elle à l'ensemble de droite ?

Y		*L*		*K*
	M		*T*	
W			*Q*	
	U	*F*		*A*
B		*O*	*N*	

X		*S*	*P*	
	I		*V*	
J			*Z*	*G*
	E		*C*	*D*
	R	*H*		

Étape 2-2: la seconde lettre du mot appartient-elle à l'ensemble du bas ?

Y		L		K
	M		T	
W			Q	
	U	F		A
B		O	N	

X		S	P	
	I		V	
J			Z	G
	E		C	D
	R	H		

Étape 2-3: la troisième lettre du mot appartient-elle à l'ensemble de droite ?

Y		L		K
	M		T	
W			Q	
	U	F		A
B		O	N	

X		S	P	
	I		V	
J			Z	G
	E		C	D
	R	H		

Étape 2-4: la quatrième lettre du mot appartient-elle à l'ensemble du bas ?

Y		L		K
	M		T	
W			Q	
	U	F		A
B		O	N	

X		S	P	
	I		V	
J			Z	G
	E		C	D
	R	H		

Étape 2-5: la cinquième lettre du mot appartient-elle à l'ensemble du bas ?

Y		*L*		*K*
	M		*T*	
W			*Q*	
	U	*F*		*A*
B		*O*	*N*	

X		*S*	*P*	
	I		*V*	
J			*Z*	*G*
	E		*C*	*D*
	R	*H*		

Étape 3: Retour à la liste

0 kayak	8 bilan	16 canut	24 géant
1 balai	9 fétus	17 canoë	25 école
2 butin	10 bravo	18 jouet	26 cruel
3 flash	11 kiwis	19 elfes	27 heure
4 karma	12 appat	20 haiku	28 vegan
5 alibi	13 frite	21 carte	29 jesus
6 flirt	14 bidet	22 doigt	30 dépit
7 athée	15 fesse	23 index	31 chips

Plan

Cas particulier des rationnels p/q

Propriété 1

Les rationnels ont une écriture décimale périodique à partir d'un certain rang.

Exemples / contrexemples :

- $1/3 = 0{,}3333...$ est périodique de période "3", de longueur 1,
- $1/4 =$ 0,25 est périodique à partir du troisième chiffre après la virgule de période "0", de longueur 1.
- $1/99 =$ 0,01010101... est périodique de période "01", de longueur 2.
- π ou e par exemple ne vérifient pas cette propriété...

Cas encore plus particulier des rationnels 1/p

Propriété 2

Les rationnels de la forme $1/p$ ont une écriture décimale périodique dont la longueur de la période est inférieure ou égale à p-1.

Propriété 3

Les entiers p tels que $1/p$ ait une période égale à p-1 sont des nombres premiers dits **longs.**

Exemples : les deux plus petits nombres premiers longs sont 7 et 17. En effet,

$$\frac{1}{7} = 0,142\,857\,142\,857\ldots$$

(période de longueur 6=7-1) et

$$\frac{1}{17} = 0,0588235294117647\,0588235294117647\ldots$$

(période de longueur 16=17-1).

La "cyclicité" étonnante des périodes

Pour la période de 1/7 :

$$\begin{array}{rcl}
1 \times 142\,857 & = & 142857 \\
2 \times 142\,857 & = & 285714 \\
3 \times 142\,857 & = & 428571 \\
4 \times 142\,857 & = & 571428 \\
5 \times 142\,857 & = & 714285 \\
6 \times 142\,857 & = & 857142 \\
7 \times 142\,857 & = & 999999
\end{array}$$

De même pour la période de 1/17:

$$\begin{array}{rcl}
1 \times 0588235294117647 & = & 0588235294117647 \\
2 \times 0588235294117647 & = & 1176470588235294 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
16 \times 0588235294117647 & = & 9411764705882352 \\
17 \times 0588235294117647 & = & 9999999999999999
\end{array}$$

La "complémentarité" étonnante des périodes

Pour la période de $1/7$, 142857 :

$$1 + 8 = 9$$
$$4 + 5 = 9$$
$$2 + 7 = 9$$
$$14 + 28 + 57 = 99$$
$$142 + 857 = 999$$

De même pour la période de $1/17$, 0588235294117647. :

$$05 + 88 + 23 + 52 + 94 + 11 + 76 + 47 = 4 \times 99$$
$$0588 + 2352 + 9411 + 7647 = 2 \times 9999$$
$$05882352 + 94117647 = 99999999$$

N.B.: il suffit de retenir la moitié de la période !

Plan

1. De l'écriture décimale
    - Quelques rappels
    - Explications des tours sur la table de 142 857 et l'écriture décimale de p/q
2. Des critères de divisibilité
    - Quelques rappels
    - Explication du tour sur la factorisation éclair
3. Des bases
    - Quelques rappels
    - Explication du Stegosaurus

Table de 142 857: Explications 1/2

Rappel du tour : Calcul de $142\,857 \times N$ où $N < 100$.

Première étape : division euclidienne de N par 7

Trouver (q,r) tel que $N = 7q + r$ avec $0 \leq r \leq 6$ donc
$142\,857 \times N = 142\,857 \times (7q + r) = q \times (7 \times 142\,857) + (r \times 142\,857)$

Exemple : Pour calculer $142\,857 \times 17$, le magicien remarque que $17 = 7 \times 2 + 3$ et en déduit que

$$142\,857 \times 17 = 2 \times (7 \times 142\,857) + 3 \times 142\,857$$

Explications 2/2

Seconde étape : Propriétés de 142 857

142 857 est cyclique et $142\,857 \times 7 = 999999$.

Exemple :

$$142\,857 \times 17 = 2 \times (7 \times 142\,857) + 3 \times 142\,857$$

- $2 \times (7 \times 142\,857) = 2\,000\,000 - 2$.
- $3 \times 142\,857 = 428\,571$ (voir astuce page suivante).

Donc $142\,857 \times 17 = 2\,000\,000 - 2 + 428\,571 = 2428569$
(attention à ne pas oublier de retrancher $q = 2$ de $2\,428\,571$!).

Dernière petite astuce

Le produit de 142 857 par un nombre i entre 1 et 6 est le nombre de six chiffres dont

- le premier chiffre est le i-ème plus petit chiffre de 142 857
- la suite des chiffres est la même que dans 142 857 (en revenant si besoin au début –à 1– après le dernier chiffre –le 7–)

Exemple : $142\,857 \times 3 = 428\,571$ (on part du 3^e plus petit chiffre de 142 857, donc 4, et poursuit sur six chiffres: 428 571)

Rappel du tour de l'écriture décimale de p/q

1	3	5	7	9	11	13	15	17
0	2	4	6	8	10	12	14	16

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

1. Sommer 2 nombres *sur la même ligne* du numérateur.
2. Sommer 4 nombres du dénominateur tels qu'il n'y en ait qu'un sur chaque ligne et chaque colonne.

Écriture décimale de p/q : Explications 1/3

- **Aspect "magique"** : la matrice au dénominateur est appelée *matrice de forçage* ; quel que soit votre choix, la somme des nombres sélectionnés sera 34 (preuve laissée à l'auditoire).
- **Aspect mathématique** : le choix sur la même ligne au numérateur implique une somme paire, qui se simplifiera avec le dénominateur pour donner **une fraction de la forme n/17** où $1 \leq n \leq 16$

Mais comment donner l'écriture décimale de n/17 ?

Écriture décimale de p/q : Explications 2/3

Détermination des 2 premiers chiffres après la virgule

- Si $n \leq 8$, les deux premiers chiffres sont $6 \times n - 1$
- Si $n > 8$, les deux premiers chiffres sont $6 \times n - 2$

Exemples :

- les deux premiers chiffres après la virgule de $2/17$ sont 1 et 1 (car $11 = 6 \times 2 - 1$),
- les deux premiers chiffres après la virgule de $11/17$ sont 6 et 4 (car $64 = 6 \times 11 - 2$).

Écriture décimale de p/q : Explications 3/3

Utilisation de la cyclicité de la période

Il ne reste qu'à retrouver les 2 chiffres dans la période de 1/17 et de poursuivre aussi loin que souhaité.

Exemples : Dans 0588235294117647, on repère 11 (resp. 64) et on écrit

- 2/17=0,11764705882352941176 4...
- (resp. 11/17=0,6470588235294117647 05...)

N.B. : Astuce pour retrouver plus vite les 2 chiffres : 0, 2, 3, 5 et 8 sont dans la première moitié de la période, 9, 7, 6, 4, et 1 dans la seconde.

Plan

1. De l'écriture décimale
   - Quelques rappels
   - Explications des tours sur la table de 142 857 et l'écriture décimale de p/q
2. Des critères de divisibilité
   - Quelques rappels
   - Explication du tour sur la factorisation éclair
3. Des bases
   - Quelques rappels
   - Explication du Stegosaurus

des plus connus...

Considérons le nombre $A = \sum_{i=0}^{m} a_i 10^i$

n	Critère de divisibilité de A par n
2	a_0 pair
3	$\sum_{i=0}^{m} a_i$ divisible par 3
5	$a_0 = 0$ ou $a_0 = 5$
9	$\sum_{i=0}^{m} a_i$ divisible par 9
11	$\sum_{i=0}^{m} (-1)^i a_i$ divisible par 11

...aux plus exotiques

n	Critère de divisibilité de A par n
$d9$	$\sum_{i=1}^{m} a_i 10^{i-1} + (d+1) \times a_0$ divisible par $d9$
$d1$	$\sum_{i=1}^{m} a_i 10^{i-1} - d \times a_0$ divisible par $d1$

Note : On retrouve les critères de divisibilité par 9 et 11.

Exemple : 961 est-il divisible par 19 ? par 31 ?

- $96 + 2 \times 1 = 98$ et $9 + 2 \times 8 = 25$.
  25 n'est pas divisible par 19 donc 961 non plus.
- $96 - 3 \times 1 = 93$ et $9 - 3 \times 3 = 0$ donc 961 est divisible par 31.

N.B. : méthode très connue dans les mathématiques védiques par exemple (pas seulement).

Quelques astuces...parmi une infinité

$$\begin{aligned} 1001 &= 7 \times 11 \times 13 \\ 10\,001 &= 73 \times 137 \\ 999 &= 27 \times 37 \end{aligned}$$

Exemple 1 : un nombre de la forme *abc abc* sera toujours divisible par 7, 11 et 13.

Exemple 2 : un nombre de la forme *ab cda bcd* sera toujours divisible par 73 et 137.

Plan

Factorisation éclair : Explication 1/2

La façon de compléter le nombre $abc\,def$ est capitale : il vérifie $a+d=b+e=c+f=9$.

Ce nombre ne peut qu'être un multiple de 999 (c'est-à-dire que un nombre de la forme $999\times n$).

Calcul littéral :

$$\begin{array}{rrrrrr} & & & a & b & c \\ \times & & & 9 & 9 & 9 \\ \hline a & b & d & (9-a) & (9-b) & (9-d) \end{array} \qquad \text{avec} \quad d=c-1.$$

Exemple : $684\times 999=683\,316$:

$$\begin{array}{rrrrrr} & & & 6 & 8 & 4 \\ \times & & & 9 & 9 & 9 \\ \hline 6 & 8 & 3 & (9-6) & (9-8) & (9-3) \end{array} \qquad \text{avec} \quad 3=4-1.$$

Factorisation éclair : Explication 2/2

- Le magicien observe les 3 premiers chiffres du nombre à 6 chiffres initial, et ajoute 1,
- Le nombre à 3 chiffres trouvé ainsi que 27 et 37 (toujours) divisent le nombre à 6 chiffres soumis.

Exemple : puisque $684 \times 999 = 683\,316$ et $999 = 27 \times 37$, alors $683\,316 = 684 \times 27 \times 37$.

Raffinement ultime : Commencez par demander la vérification que 37 (ou 27) divise bien le nombre, cela vous laissera un peu de temps pour (essayer de) décomposer le nombre à 3 chiffres en facteurs premiers !

Plan

Rappels sur la base 2

- **Qu'est ce ?** C'est un moyen utilisé notamment en informatique pour représenter les nombres avec les deux symboles 0 et 1.
- **Comment fait-on ?** On somme des puissances de 2. Chaque 1 (resp. 0) en i-ième position en partant de la droite indique la présence (resp. l'absence) de 2^{i-1} dans la somme.
- **Exemple :** En base 2, $11010 = 1 \times 2^{5-1} + 1 \times 2^{4-1} + 0 \times 2^{3-1} + 1 \times 2^{2-1} + 0 \times 2^{1-1}$ donc, en base 2, $11010 = 16 + 8 + 2 = 26$.

Plan

1. De l'écriture décimale
   - Quelques rappels
   - Explications des tours sur la table de 142 857 et l'écriture décimale de p/q
2. Des critères de divisibilité
   - Quelques rappels
   - Explication du tour sur la factorisation éclair
3. Des bases
   - Quelques rappels
   - Explication du Stegosaurus

Tour du Stegosaurus

Rappel du tour:

- Choisir un mot dans une liste,
- Pour chaque lettre du mot, indiquer si elle appartient à un ensemble de lettres donné,
- Retrouver le mot dans la liste.

Étape 1: Choix du mot dans la liste

0 kayak	8 bilan	16 canut	24 géant
1 balai	9 fétus	17 canoë	25 école
2 butin	10 bravo	18 jouet	26 cruel
3 flash	11 kiwis	19 elfes	27 heure
4 karma	12 appat	20 haiku	28 vegan
5 alibi	13 frite	21 carte	29 jesus
6 flirt	14 bidet	22 doigt	30 dépit
7 athée	15 fesse	23 index	31 chips

Explications

- Chaque mot de la liste est numéroté de 0 à 31.
- Il n'y a que deux types de cartes "lettres", l'une vaut 1 et l'autre 0.
- Une fois que le spectateur a répondu au 5 questions, il a créé un nombre en base 2.

Exemple : les 5 réponses "non","non", "oui", "non", "oui" correspondent au nombre 11010. Le nombre associé est donc 11010 ce qui vaut 26 en base 2 : le mot numéroté 26 de la liste proposé initialement est CRUEL. C'est le mot choisi !

Conclusion

- L'étonnement est un bon moteur
- Dès qu'une propriété étonnante apparaît en math, un tour potentiel aussi
- Penser toujours à faire un "pas de côté"

À VOUS DE JOUER !

Bibliographie pour aller plus loin

- Gardner, M. (1956), Mathematics, magic and mystery éd. Dover
- Lamoitier, J.-P. (2012), Arithmétique classique, éd. ellipses
- Souder, D. (2016) Maths et magiques : Niveaux Collège et Lycée, éd. SOS éducation
- Souder, D. et Souder P. (2O10), Magic Mathieu compte en moins de 2 !, éd. Belin